

MODEL PAPER
B.Sc (CBCS) DEGREE EXAMINATION.

Third Semester
Paper II - Mathematics

ABSTRACT ALGEBRA.

Time: 3 hrs

Max. Marks: 75 marks

SECTION - A (5x5 = 25 m)

Answer any FIVE from the following questions.

1. If a, b are any two elements of a group (G, \cdot) , which commute. Show that a^{-1}, b^{-1} also commute.
 2వ సమూహము (G, \cdot) లో a, b మూలకములు వికాసము ధర్మం పాటించిన, a^{-1}, b^{-1} ల వికాసము ధర్మం పాటించునని ఈ చూపుము.

2. Show that the set of integers $\{1, 5, 7, 11\}$ form an abelian group w.r.t. multiplication modulo 12.

12 కు వికాసము 12 ద్వారా గుణకము సమితి $\{1, 5, 7, 11\}$ వికాసము సమూహము అయింది. ఈ చూపుము.

3. If H and K are two subgroups of a group G , then show that $H \cup K$ is a subgroup of G iff either $H \subseteq K$ or $K \subseteq H$.

H మరియు K లు సమూహము G కి ఉపసమూహములు అయితే, $H \cup K$ కి సమూహము అని ఉపసమూహము అయిందని, ఇవలె, $H \subseteq K$ లేదా $K \subseteq H$ అవుతుంది.

4. If H is a normal subgroup of a finite group G ; then show that $O(G/H) = O(G)/O(H)$.

H అసాధారణ సమితి సమూహము G కి అయితే, $O(G/H) = O(G)/O(H)$ అని చూపుము.

5. If $f: G \rightarrow G'$ is a homomorphism then prove that $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$

$f: G \rightarrow G'$ అసాధారణ సమూహముల సమూహము అయితే $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$ అని చూపుము.

6. Prove that any group of prime order p isomorphic to $(\mathbb{Z}_p, +_p)$.

ఏ ప్రధాన సంఖ్య p అయితే p అంశం గల ఏదైనా గ్రూప్ $(\mathbb{Z}_p, +_p)$ కు అనుకూలంగా ఉంటుంది.

7. Prove that every finite integral domain is a field.

అంతమందిన అంతగ్రామం అయితే అది ఒక క్షేత్రం అవుతుంది.

8. If F is a field, then prove that $\{0\}$ and F are the only ideals of F .

F ఒక క్షేత్రం అయితే $\{0\}$ మరియు F మాత్రమే F యొక్క ఆదర్శాలు అవుతాయి.

SECTION - B (5x10 = 50 q)

Answer the following (ONE from each Unit).

UNIT - I

9 (a) Show that the set $G = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} / \theta \text{ is real} \right\}$

is a group under matrix multiplication.

అదే గ్రూప్ గా మ్యాట్రిక్స్ గుణకరణ క్రింద

$G = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} / \theta \text{ is real} \right\}$ ఒక గ్రూప్ అవుతుంది.

అనుకూలంగా ఉంటుంది.

(or)

b Show that (\mathbb{Z}_n, \oplus) is an abelian group.

(\mathbb{Z}_n, \oplus) ఒక అబిలియన్ గ్రూప్ అవుతుంది.

UNIT - II

10 (a) Let H be a non-empty subset of a group G . Prove that the necessary and sufficient condition for H to be a subgroup of G is $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$, where b^{-1} is inverse of b in G .

అనుకూలంగా ఉండే G యొక్క H ఒక సబ్గ్రూప్ అయితే $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$, ఇక్కడ b^{-1} అంటే G యొక్క b యొక్క విలోమం. (P.T.O)

10 (b) State and prove Lagrange's theorem.
 గ్రూప్ ప్రొపర్టీస్ (అంటే సూత్రం)

UNIT-III

11 (a) Prove that the set G/H of all cosets of H in G with respect to coset multiplication is a group.
 గ్రూప్ H యొక్క సోపానాలు పై G/H సోపానాలు గుణకము
 మూల్యం ఆ సూత్రం ఆ సూత్రం.
 (Or)

(b) State and prove fundamental theorem of homomorphism of groups.
 సూత్రం అంటే సూత్రం మూల ప్రొపర్టీస్ (అంటే సూత్రం సూత్రం)

UNIT-IV

12 (a) State and prove Cayley's theorem.
 గ్రూప్ సూత్రం అంటే సూత్రం

(Or)

(b) Define cyclic group. Prove that the order of a cyclic group is equal to the order of its generator.
 సూత్రం సూత్రం సూత్రం (అంటే) ఆ సూత్రం సూత్రం అంటే మూల ప్రొపర్టీస్ అంటే సూత్రం ఆ సూత్రం

UNIT-V

13 (a) If $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} / a, b \in \mathbb{Q}\}$, then show that $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ is a field.

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} / a, b \in \mathbb{Q}\}$ అంటే అంటే $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ఆ సూత్రం అంటే సూత్రం.
 (Or)

(b) Show that a finite commutative ring without zero divisors is a field.
 సూత్రం సూత్రం అంటే ఆ సూత్రం ప్రొపర్టీస్ మూల ప్రొపర్టీస్ సూత్రం